



نام و نام خانوادگی:

پایه و رشته: یازدهم تجربی

کلاس:

درس: ریاضیات ۲

دبیر: آقای فیضیان

ردیف

سوال

بارم

جاهای خالی را پر کنید و راه حل محاسبه جواب را به صورت خلاصه بنویسید.

(۱) مساحت مثلثی با سه راس به مختصات $A(2,5), B(3,0), C(0,2)$ برابر می باشد.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |0 + 6 + 0 - 15 - 0 - 4| = \frac{13}{2} = 6.5$$

(۲) اگر x, y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ مساوی است.

مطابق نامساوی کوشی: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$$(9 + 16)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2 \Rightarrow (3x + 4y)^2 \leq 25 \times 50 \Rightarrow 3x + 4y \leq 25\sqrt{2}$$

۲/۵

(۳) زاویه های یک مثلث متناسب با اعداد ۶، ۵ و ۱ می باشد، کوچکترین ارتفاع این مثلث برابر بزرگترین ضلع آن است.

$$x + 5x + 6x = 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ \Rightarrow 6x = 90^\circ$$

اگر در مثلث قائم الزاویه ای یکی از زاویه ها ۱۵ درجه باشد، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

(۴) اگر در تابع $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x - 3}{-3x^2 + bx + 2c}}$ داشته باشیم: $D_f = R - \{\frac{1}{2}\}$ ، مقادیر b, c به ترتیب برابر و می باشد.

$$-3x^2 + bx + 2c = -3(x - \frac{1}{2})^2 = -3x^2 + 3x - \frac{3}{4} \Rightarrow b = 3, c = -\frac{3}{8}$$

(۵) اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، $f(x) = 3x - 4$ ، $g(x) = f^{-1}(16)$ حاصل $g^{-1}(16)$ برابر می باشد.

$$f^{-1}(16) = 16 + 4 = 20 \Rightarrow 3x - 4 = 20 \Rightarrow x = 8$$

سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3, AC: y - 2x = 5, BC: 2y + 3x = 6$ هستند، معادله ارتفاع AH از این مثلث مفروض را بنویسید.

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y + 2x = -6 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{-7}{3} \Rightarrow A(\frac{-7}{3}, \frac{1}{3}) \quad (0.15)$$

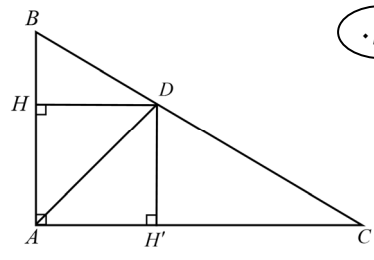
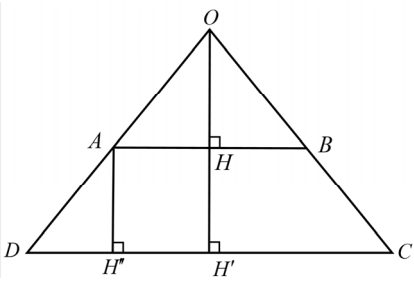
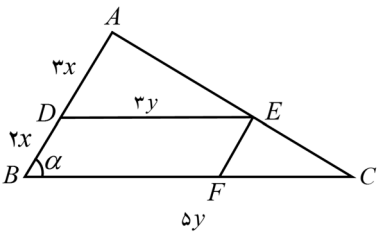
۱

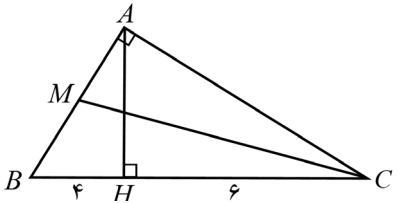
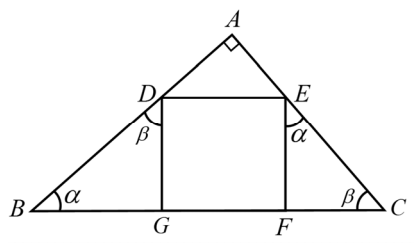
$$2y + 3x = 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{2}{3} \quad (0.25)$$

$$AH: y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x + \frac{7}{3}) \Rightarrow 9y - 6x = 17 \quad (0.25)$$

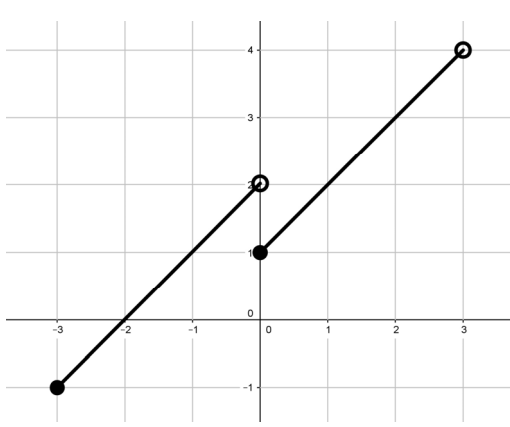
۲

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2x - y = 7$, $2y + x = 6$ و یک راس آن نقطه $A(8, 5)$ می باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟</p> $\begin{cases} BC : 2y + x = 6 \\ CD : 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (0.25)$ $AB = \frac{ 8 + 10 - 6 }{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}}, AD = \frac{ 16 - 5 - 7 }{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9.6 \quad (0.25)$ <p style="text-align: center;">(0.25) (0.25)</p>	۳
۱	<p>معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن از سه برابر عکس ریشه های معادله $x^2 + 6x + 2 = 0$ دو واحد بیشتر باشد.</p> $y = \frac{3}{x} + 2 \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{1}{y-2} \Rightarrow x = \frac{3}{y-2} \quad (0.15)$ $\frac{9}{(y-2)^2} + \frac{18}{y-2} + 2 = 0 \Rightarrow 2(y-2)^2 + 18(y-2) + 9 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 8y + 8 + 18y - 36 + 9 = 0$ $2y^2 + 10y - 19 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x - 19 = 0 \quad (0.15)$	۴
۱	<p>فاصله دو شهر واقع در کنار رودخانه ای ۱۴۴ کیلو متر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را بر می گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.</p> $\frac{144}{x} + \frac{144}{x-8} = 17 \Rightarrow \frac{48}{x} + \frac{48}{x-8} = 5 \xrightarrow{\times x(x-8)} 48x - 48 \times 8 + 48x = 5x^2 - 40x \Rightarrow$ $5x^2 - 136x + 48 \times 8 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 136(5x) + 16 \times 120 = 0 \Rightarrow (5x - 120)(5x - 16) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ x = \frac{16}{5} \end{cases} \quad \text{غ ق ق} \quad (0.15)$	۵
۱	<p>معادله گنگ مقابل را حل کنید.</p> $\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4$ $\sqrt{x+7} = t \Rightarrow x = t^2 - 7 \quad (0.25)$ $\sqrt{t^2+1} + 2t + \sqrt{t^2-6-t} = 4 \Rightarrow \sqrt{t^2-t-6} = 3-t \Rightarrow t^2-t-6 = t^2-6t+9 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$ $\sqrt{x+7} = 3 \Rightarrow x+7 = 9 \Rightarrow x = 2 \quad (0.25)$	۶

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۳ و ۷ طول نیم ساز داخلی زاویه قائم چقدر است؟</p> <p>هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله می باشد: $DH = DH' = x$ (۰/۲۵)</p>  <p>$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 7 = \frac{1}{2} \times 7x + \frac{1}{2} \times 3x \Rightarrow$ (۰/۲۵)</p> <p>$1 \cdot x = 21 \Rightarrow x = 21/1$ (۰/۲۵)</p> <p>$AD = \sqrt{2} \times 21/1 = 21/\sqrt{2}$ (۰/۲۵) طول قطر یک مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است:</p>	۷
۱	<p>اگر $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ و $x, y, z \neq 0$ باشد، مقدار عددی $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ چقدر است؟</p> <p>$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{5+6+7} = k \Rightarrow x+y+z = 9k & (۰/۲۵) \\ x+y = 5k, y+z = 6k, x+z = 7k & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow$</p> <p>$x = 3k, y = 2k, z = 4k \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{6k^2+8k^2+12k^2}{9k^2+4k^2+16k^2} = \frac{26}{29}$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵)</p>	۸
۱	<p>در یک دوزنقه متساوی الساقین، طول قاعده ها ۹ و ۱۵ واحد و اندازه ساق ها ۵ واحد است. فاصله نقطه تلاقی دو ساق این دوزنقه قاعده کوچکتر چند واحد است؟</p>  <p>$OH = x$</p> <p>$2DH'' = 15 - 9 \Rightarrow DH'' = 3 \Rightarrow$ (۰/۲۵)</p> <p>$AH'' = HH' = 4$ (۰/۲۵) اعداد فیثاغورسی:</p> <p>$\frac{x}{x+4} = \frac{9}{15} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{6} \Rightarrow x = 6$ (۰/۱۵)</p>	۹
۰/۷۵	<p>در شکل روبرو اگر $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$ باشد، مساحت متوازی الاضلاع BDEF چند درصد مساحت مثلث ABC است؟</p>  <p>$\frac{S_{BDEF}}{S_{ABC}} = \frac{2x \times 3y \times \sin \alpha}{\frac{1}{2} \times 5x \times 5y \times \sin \alpha} = \frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 48\%$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۱۵)</p>	۱۰

بارم	سوال	ردیف
۰/۷۵	<p>در بزرگترین مثلث قائم الزاویه شکل مقابل، اندازه بزرگترین میانه چقدر است؟</p>  <p> $AB^2 = BH \times BC = 4 \times 10 = 40 \Rightarrow AB = 2\sqrt{10} \Rightarrow AM = \sqrt{10}$ (۰/۲۵) $AC^2 = CH \times BC = 6 \times 10 = 60 \Rightarrow AC = 2\sqrt{15}$ (۰/۲۵) $CM^2 = AM^2 + AC^2 = 10 + 15 = 25 \Rightarrow CM = 5$ (۰/۲۵) </p>	۱۱
۱	<p>در شکل روبرو $DEFG$ مربع است. اگر $AB = 4, AC = 3$ باشد، طول ضلع این مربع چقدر است؟</p>  <p> $AB = 4, AC = 3 \Rightarrow BC = 5$ (۰/۲۵) $ABC \sim BDG \Rightarrow \frac{BG}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow BG = \frac{4}{3}x$ (۰/۲۵) $ABC \sim CEF \Rightarrow \frac{CF}{3} = \frac{x}{4} \Rightarrow CF = \frac{3}{4}x$ (۰/۲۵) $x + \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = 5 \Rightarrow 12x + 9x + 9x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{37}$ (۰/۲۵) </p>	۱۲
۱	<p>دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x[-\frac{2x}{15}]}$ را بدست آورید.</p> <p> $x[-\frac{2x}{15}] \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ [-\frac{2x}{15}] = 0 \Rightarrow 0 \leq -\frac{2x}{15} < 1 \Rightarrow 0 \leq -2x < 15 \Rightarrow -\frac{15}{2} < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D = (-\frac{15}{2}, 0]$ (۰/۱۵) (۰/۱۵) </p>	۱۳
۱	<p>برای دو تابع $f = \{(-4, 1), (-2, 5), (0, 3), (1, 4), (3, 2)\}$ و $g(x) = \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}$ تابع $\frac{f \cdot g}{3-f}$ را بیابید.</p> <p> $g = \{(-2, \frac{2}{\sqrt{5}}), (0, \frac{2}{3}), (1, \frac{2}{\sqrt{8}}), \dots\} = \{(-2, \frac{2\sqrt{5}}{5}), (0, \frac{2}{3}), (1, \frac{\sqrt{2}}{2}), \dots\}$ (۰/۲۵) $f \cdot g = \{(-2, 2\sqrt{2}), (0, 2), (1, 2\sqrt{2})\}, 3-f = \{(-2, -2), (0, 0), (1, -1), \dots\}$ (۰/۱۵) $\frac{f \cdot g}{3-f} = \{(-2, -\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{2})\}$ (۰/۲۵) </p>	۱۴

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>اگر $f(x) = 4x^2 - 1$، $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشند، دامنه تابع gof را بدون تشکیل ضابطه آن بدست آورید.</p> <p>$D_{gof} = \{x \in D_f; f(x) \in D_g\} = \{x \in R; 4x^2 - 1 \in [-1, 1]\}$ (۰/۱۵)</p> <p>$-1 \leq 4x^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4x^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ (۰/۲۵)</p> <p>$D_{gof} = \{x \in R; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\} = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (۰/۲۵)</p>	۱۵
۱	<p>ضابطه تابع وارون تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 x }{x^4+1}$ را بدست آورید.</p> <p>می دانیم حاصل تقسیم یک نامنفی بر یک واحد بیشتر از خوش از صفر تا یک می باشد:</p> <p>$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4+1} & x \geq 0 \\ \frac{-x^4}{x^4+1} & x < 0 \end{cases}$ $R_1 = [0, 1)$, $R_2 = (-1, 0)$</p> <p>$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x}{1-x}} & 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt[4]{\frac{-x}{1+x}} & -1 < x < 0 \end{cases}$ (۰/۱۵)</p> <p>(۰/۱۵)</p>	۱۶
۱	<p>در یک دایره به مرکز O و به شعاع ۳ طول کمان بزرگتر مقابل زاویه AOB برابر 4π است. طول وتر AB چقدر است؟</p> <p>محیط دایره $= 2\pi r = 6\pi$</p> <p>طول کمان کوچک $= 6\pi - 4\pi = 2\pi$ (۰/۲۵)</p> <p>$L = r\alpha \Rightarrow 2\pi = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (۰/۲۵)</p> <p>در مثلث متساوی الساقین OAB، ارتفاع، نیمساز و عمود منصف نیز هست و می دانیم که طول ضلع مقابل به زاویه 60° درجه در مثلث قائم الزاویه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است، بنابراین:</p> <p>$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \Rightarrow AB = 3\sqrt{3}$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵)</p>	۱۷

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>الف) در دایره ای به شعاع ۴ واحد طول کمان روبرو به زاویه مرکزی α برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. مساحت قطاع نظیر این زاویه چقدر است؟</p> $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} r \times L = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad (0.25)$ <p>ب) زاویه بین دو عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت ۲:۴۰ را بر حسب درجه بدست آورید.</p> <p>روش اول:</p> $\alpha = 180^\circ - \frac{40}{60} \times 360^\circ = 180^\circ - 240^\circ = 160^\circ \quad (0.25)$ <p>روش دوم:</p> $\alpha = \left \frac{11}{2} m - 30h \right = 220 - 60 = 160^\circ \quad (0.25)$	۱۸
۱	<p>نمودار تابع $y = x - \left[\frac{x}{3} + 1 \right] + 2$ را در فاصله $[-3, 3]$ رسم نمایید.</p> $y = x - \left[\frac{x}{3} + 1 \right] + 2 = x - \left[\frac{x}{3} \right] + 1$ $-3 \leq x < 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 1$ $-1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow -3 \leq x < 0 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (0.25)$ $0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (0.25)$ 	۱۹