زمان: 120 دقیقه	تاریخ: 1396/10/12	بسمه تعالی	کلاس: دهم ریاضی	امتحان: هندسه 1
نام دبیر: آقای کیانی	دبیرستان:	آزمون: پایانی ترم1	اداره آموزش و پرورش منطقه	نام و نام خانوادگی:

1 – واژه های زیر را تعریف کنید. (۱/۵ نمره)

الف- استدلال استنتاجی: روش نتیجه گیری براساس واقعیت های پذیرفته شده قبلی است.

ب- مثلث های متشابه : دو مثلث متشابه اند اگر و فقط اگر زاویه های آن هم اندازه و اضلاع آنها متناسب باشند

ج- اصل : به جملات همواره درست گویند که نمی توان درستی آن را ثابت کرد.

2- برای هر یک از احکام زیر یک مثال نقض بیاورید: (۱/۵ نمره)

الف – اگر $x \in N$ و $x \neq ۳$ آنگاه: $x^۲ + ۱$ همواره عددی اول است. اگر $x=۵ \Rightarrow x^۲+۱=۲۶$ ← اول نیست

ب- مثلث متساوی الساقینی که زاویه داخلی بین دو ساقش سه برابر هریک از زاویه های داخلی دیگرش باشد وجود ندارد.

مثلث متساوی الساقین با اندازه زاویه های $\hat{A}=۱۰۸^\circ$, $\hat{B}=\hat{C}=۳۶^\circ$

3- نقیض گزاره های زیر را بنویسید. (۱/۵ نمره)

الف –مثلثی وجود دارد که تمام زاویه های آن با هم برابر است. هیچ مثلثی وجود ندارد که تمام زاویه های آن با هم برابر باشد

ب –هر مربع یک لوزی است. هیچ مربعی لوزی نیست

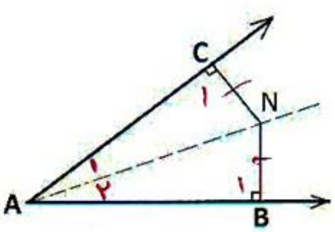
4- عکس قضیه ی زیر را بنویسید و سپس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید. (۲ نمره)

" اگر زاویه های روبرو در یک چهار ضلعی دو به دو برابر باشند آنگاه چهار ضلعی متوازی الاضلاع است."

بیان عکس قضیه: اگر چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد آنگاه زاویه های روبروی آن دو به دو برابرند

بیان قضیه دو شرطی: اگر زاویه های روبرو در یک چهارضلعی برابر باشند آنگاه چهارضلعی متوازی الاضلاع است و به عکس.

5- ثابت کنید اگر نقطه ای از دو ضلع زاویه به یک فاصله قرار داشته باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. (۱نمره)



فرض $\begin{cases} NC \perp AC \\ NB \perp AB \\ NC = NB \end{cases}$

حکم { N روی نیمساز $\hat{A}$ قرار دارد

$\left.\begin{array}{l} NC = NB \\ \hat{C}_1 = \hat{B}_1 = ۹۰^\circ \\ AN = AN \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{زاویه قائمه}]{\text{وتر و یک ضلع}} \hat{ANC} \cong \hat{ANB} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow$ نقطه N روی نیمساز $\hat{A}$ قرار دارد

6- در مثلث ABC داریم $\hat{C} > \hat{B}$ به کمک برهان خلف ثابت کنید : $AB > AC$ (۱/۵ نمره)

فرض $\left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \hat{B} < \hat{C} \end{array} \right.$ حکم $\{ AB > AC$

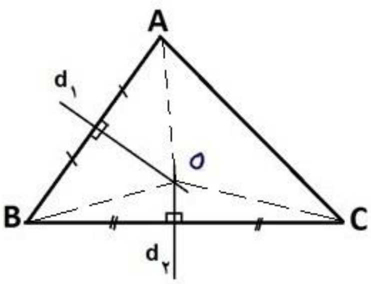
برهان خلف : فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد پس $AC \geq AB$

دو حالت وجود دارد. الف) $AC = AB$ ب) $AC > AB$

(الف) اگر $AC = AB \Rightarrow$ متساوی‌الساقین $\triangle ABC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ تناقض با فرض

(ب) اگر $AC > AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} \hat{C} < \hat{B}$ تناقض با فرض

این تناقض نشان می‌دهد فرض خلف باطل و حکم اولیه درست است.



7- با توجه به شکل ثابت کنید ثابت کنید عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند. (۱ نمره)

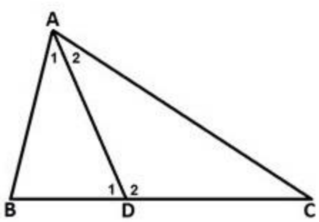
اثبات: مثلث دلخواه $\triangle ABC$ را درنظر می‌گیریم فرض می‌کنیم خطوط d_1 و d_2 به ترتیب عمودمنصف اضلاع AB و BC باشد. از آنجاییکه اضلاع AB و BC متقاطع اند پس خطوط d_1 و d_2 در نقطه‌ای مانند O متقاطع اند داریم:

O روی عمودمنصف AB قرار دارد $\xrightarrow{\text{قضیه}} OA = OB$

O روی عمودمنصف BC قرار دارد $\xrightarrow{\text{قضیه}} OC = OB$

$\Rightarrow OA = OC \xrightarrow{\text{قضیه}}$ نقطه O روی عمودمنصف AC قرار دارد

بنابراین سه عمودمنصف اضلاع در نقطه O همرسند.



8- قضیه نامساوی مثلث : ثابت کنید در هر مثلث مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر است . (۱/۵ نمره)

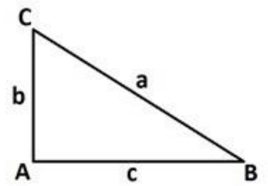
فرض $\{ \triangle ABC$ حکم $\left\{ \begin{array}{ll} AB + AC > BC & (1) \\ AB + BC > AC & (2) \\ AC + BC > AB & (3) \end{array} \right.$

اثبات (1): (اثبات موارد (2) و (3) با استدلال مشابه صورت می‌گیرد). نیمساز $\hat{A}$ را رسم می‌کنیم. این نیمساز ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند.

$\triangle ABD : \hat{D}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} > \hat{A}_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{D}_2 > \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_2 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه}} AC > DC$

با استدلال مشابه $\Longrightarrow AB > BD$ $\Bigg\} \Rightarrow$

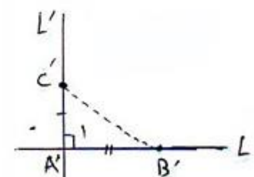
$\Longrightarrow AB + AC > BD + DC \Rightarrow AB + AC > BC$



9- عکس قضیه فیثاغورس : در مثلث ABC تساوی $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$ برقرار است . ثابت کنید مثلث قائم الزاویه است. (۱/۵ نمره)

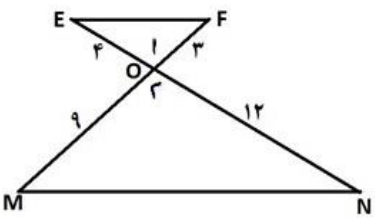
فرض $\{ AB^2+AC^2=BC^2$ حکم $\{ A\hat{B}C$ قائم الزاویه

اثبات : خطوط L و L′ را عمود بر یکدیگر متقاطع در نقطه A′ را رسم می کنیم
به اندازه AB روی L از نقطه A′ و به اندازه AC روی L′ از نقطه A′ جدا می کنیم
و نقاط بدست آمده را به ترتیب B′ و C′ می نامیم و پاره خط B′C′ را رسم می کنیم



$\hat{A}'_1 = 90^\circ \Rightarrow B'C'^2 = \underbrace{A'B'^2}_{=} + \underbrace{A'C'^2 = AB^2}_{=} + AC^2 = BC^2$ طبق فرض ما

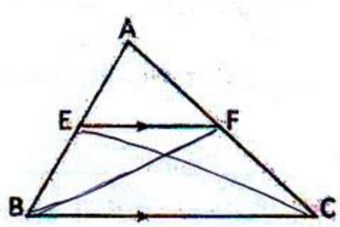
$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B'C' = BC \\ A'B' = AB \\ A'C' = AC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} A'\hat{B'}C' \cong A\hat{B}C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}'_1 = \hat{A} \\ \hat{A}'_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow A\hat{B}C$ قائم الزاویه



10- خطوط EN, FM و در نقطه O متقاطع اند ثابت کنید: $EF // MN$.(۱نمره)

$\left.\begin{array}{l} \frac{OE}{ON} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳} \\ \frac{OF}{OM} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{OE}{ON} = \frac{OF}{OM} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین}} O\hat{E}F \sim O\hat{N}M \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{E} = \hat{N} \Rightarrow EF \parallel MN$



11- قضیه تالس: در شکل مقابل ثابت کنید اگر $EF // BC$ آنگاه: $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$. (۲نمره)

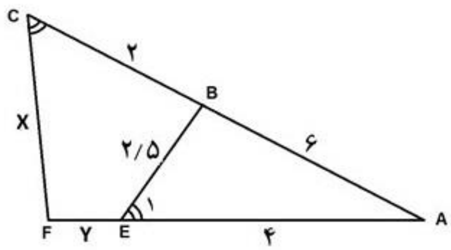
اثبات: پاره خط ها EC و BF را رسم می کنیم داریم:

$\frac{S_{A\hat{E}F}}{S_{E\hat{F}B}} = \frac{AE}{EB}$ (طبق قضیه) (۱)

$\frac{S_{A\hat{E}F}}{S_{E\hat{F}C}} = \frac{AF}{FC}$ (" ") (۲)

$EF \parallel BC \xRightarrow{\text{قضیه}} S_{E\hat{F}B} = S_{E\hat{F}C}$ (۳)

$\underbrace{\frac{AE}{EB} = \frac{S_{A\hat{E}F}}{S_{E\hat{F}B}}}_{\text{طبق (۱)}} = \underbrace{\frac{S_{A\hat{E}F}}{S_{E\hat{F}C}}}_{\text{طبق (۳)}} = \underbrace{\frac{AF}{FC}}_{\text{طبق (۲)}} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

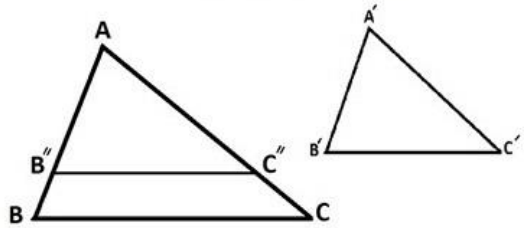


12- در شکل مقابل $\hat{E}_1 = \hat{C}$ مقدار مجهول x, y را بیابید(۲نمره)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_1=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{دو زاویه}]{\text{تساوی}} \overset{\triangle}{AEB} \sim \overset{\triangle}{ACF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AF}=\frac{EB}{CF}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۸}=\frac{۶}{۴+y}=\frac{۲,۵}{x} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۴+y=\frac{۶\times ۸}{۴} \Rightarrow ۴+y=۱۲ \Rightarrow \boxed{y=۸} \\ x=\frac{۸\times ۲,۵}{۴} \Rightarrow \boxed{x=۵}\end{array}\right.$$



13- ثابت کنید هرگاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث با هم متشابه اند. (۲نمره)

یعنی:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

$$\text{فرض}\left\{\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABC},\ \overset{\triangle}{A'B'C'}\\ \underbrace{\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}}_{①}\end{array}\right. \qquad \text{حکم}\left\{\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}\right.$$

اثبات:

به اندازه $A'B'$, $A'C'$ از نقطه A به ترتیب روی اضلاع AB , AC جدا می‌کنیم و نقاط بدست آمده را B'' , C'' می‌نامیم. سپس پاره خط $B''C''$ را رسم می‌کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}AB''=A'B'\\ AC''=A'C'\\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\ \text{طبق ①}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB''}{AB}=\frac{AC''}{AC} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{AB''}{B''B}=\frac{AC''}{C''C} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} B''C'' \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB''C''} \ ②$$

$$\left.\begin{array}{l}B''C'' \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AB''}{AB}=\frac{B''C''}{BC}\\ AB''=A'B'\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{A'B'}{AB}=\frac{B''C''}{BC}\\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}\ \text{طبق فرض}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{B''C''}{BC}=\frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}B''C''=B'C'\\ AB''=A'B'\\ AC''=A'C'\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \overset{\triangle}{AB''C''} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}\\ ②\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$