امتحان: هندسه 2	کلاس: یازدهم ریاضی	بسمه تعالی	تاریخ: 1396/10/23	زمان: 120 دقیقه
نام و نام خانوادگی:	اداره آموزش و پرورش منطقه	آزمون : دیماه	دبیرستان :	نام دبیر: آقای کیانی

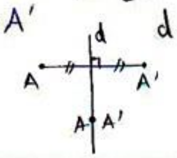
1- واژه های زیر را تعریف کنید: (۲نمره)

الف) چندضلعی محاطی و دایره محیطی:(بارسم شکل آنهار را مشخص کنید) یک چندضلعی را محاطی می‌گویند اگر و تنها اگر یک دایره از همه‌ی رئوس آن بگذرد. تحت این شرایط آن دایره را دایره محیطی یا محیط بر دایره می‌گوییم.

ب) تبدیل: تبدیل T در صفحه P، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس، هر نقطه A' از صفحه P، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است. با این ترتیب می‌نویسیم

$$\begin{cases} T: P \to P \\ T(A)=A' \end{cases}$$

ج) بازتاب: اگر A و d به ترتیب نقطه و خطی در صفحه P باشند بازتاب نقطه A غیر واقع بر خط d نقطه‌ای مانند A' است بطوری که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد.
درحالتی که نقطه A روی خط d باشد بازتاب آن یعنی A' بر A منطبق است.

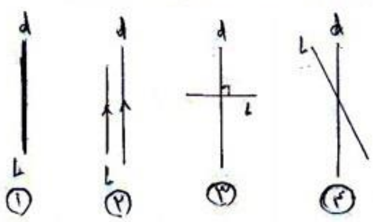


2- جملات زیر را کامل کنید. (۱/۵نمره)

همواره در تبدیل انتقال**. نقطه ثابت تبدیل وجود ندارد و درتبدیل ..**دوران**... همیشه یک نقطه ثابت وجود دارد و آن هم** مرکز دوران**. است و در تبدیل** بازتاب **بیشمار نقطه ثابت وجود دارد که همگی روی یک خط راست هستند که این خط راست ..**محور بازتاب**. نام دارد .**

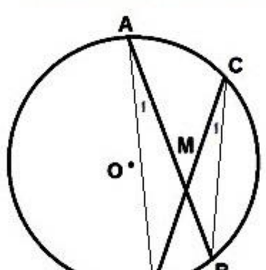
3- با رسم شکل مناسب توضیح دهید در چه حالاتی شیب خط در بازتاب حفظ میشود و در چه حالتی شیب خط حفظ نمیشود؟(۱نمره)

درحالتی که خط بر محور بازتاب منطبق - موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد شیب خط حفظ می‌شود شکل ۱-۲-۳
و درحالتی که خط محور بازتاب را قطع کند و بر آن عمود نباشد شیب خط حفظ نمی‌شود شکل ۴



4- دو وتر AB و CD درون دایره یکدیگر را در نقطه M قطع کرده اند ثابت کنید: (۱/۵نمره)

$$AM \times BM = CM \times DM$$



اثبات: پاره‌خط های AD و BC را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ محاطی} \\ \hat{C}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ محاطی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ متقابل به راس}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} A\hat{M}D \sim C\hat{M}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB} \Rightarrow \boxed{AM \times MB = CM \times MD}$$

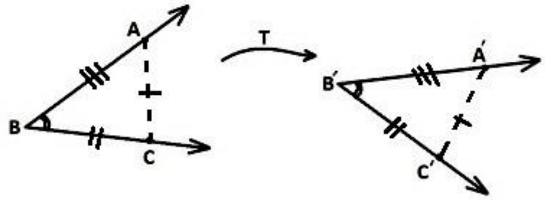
5- اگر دو دایره ی $C(O,۲۵), C'(O',۱۱)$ نسبت به یکدیگر متقاطع باشند و $OO' = ۲x - ۶$ باشد محدوده ی x را حساب کنید .

(۱نمره)

$$R - R' < OO' < R + R' \Rightarrow 25 - 11 < 2x - 6 < 25 + 11 \Rightarrow 14 < 2x - 6 < 36$$

$$\Rightarrow 14 + 6 < 2x < 36 + 6 \Rightarrow 20 < 2x < 42 \Rightarrow \boxed{10 < x < 21}$$

6- ثابت کنید هر تبدیل ایزومتری اندازه زاویه را حفظ میکند. (۱نمره)



اثبات : فرض T تبدیلی ایزومتری باشد داریم :

$$\forall A, A', B, B', C, C' \in P: \begin{cases} T(A)=A' & (1)\\ T(B)=B' & (2)\\ T(C)=C' & (3)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\} \Rightarrow AB=A'B' \\ \left.\begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array}\right\} \Rightarrow BC=B'C' \\ \left.\begin{array}{l}(1)\\(3)\end{array}\right\} \Rightarrow AC=A'C' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\hat{B}C \cong A'\hat{B'}C' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B'}$$

7-طول شعاع دو دایره متخارج را بیابید که طول مماس مشترک داخلی آنها $2\sqrt{14}$ و طول مماس مشترک خارجی آنها $6\sqrt{6}$ و طول خط المرکزین آنها ۱۵واحد باشد. (۱/۵نمره)

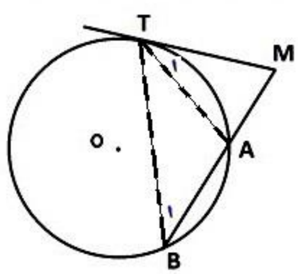
$$\begin{cases}\sqrt{15^2-(R+R')^2} = 2\sqrt{14}\\ \sqrt{15^2-(R-R')^2}=6\sqrt{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}225-(R+R')^2=56\\ 225-(R-R')^2=216\end{cases} \quad \begin{cases}(R+R')^2=169\\ (R-R')^2=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}R+R'=13\\ R-R'=3\end{cases} \Rightarrow 2R=16 \Rightarrow \boxed{R=8} \qquad 8+R'=13 \Rightarrow \boxed{R'=5}$$

8-ثابت کنید هرگاه M نقطه ای بیرون دایره باشد واز M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم . مربع اندازه مماس برابر است با حاصلضرب اندازه های دو قطعه قاطع . یعنی در شکل روبرو داریم :

$$MT^2 = MA \times MB$$

(۱/۵نمره)

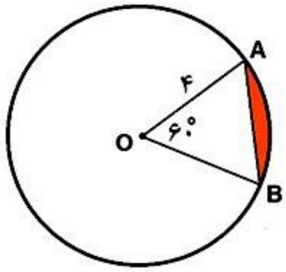


پاره خط ها AT و BT را رسم می کنیم داریم :

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AT}}{2} \\ \text{ظلی } \hat{T}_1 = \frac{\widehat{AT}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{T}_1\\ \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{دوزاویه}]{\text{تساوی}} T\hat{M}A \sim B\hat{M}T \Rightarrow \underbrace{\frac{MA}{MT} = \frac{TM}{BM}} = \frac{TA}{BT} \Rightarrow$$

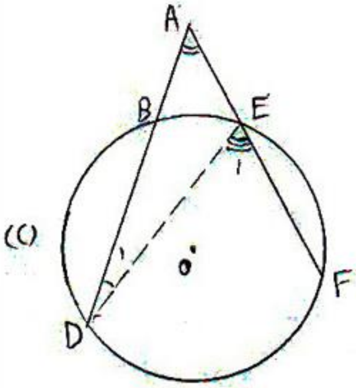
$$\Rightarrow MT^2 = MA \times MB$$

9- درشکل مقابل شعاع دایره به Oمرکز ۴واحد است **مساحت** قسمت تیره رنگ را بر حسب عددپی حساب کنید. (۱/۵نمره)



$$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{قطاع } AOB} - S_{A\hat{O}B} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin\hat{O}$$

$$= \frac{\pi(4)^2 60}{360} - \frac{1}{2}\times 4\times 4\times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{8\pi - 12\sqrt{3}}{3}$$



10- در دایره $C(O,R)$ وتر های BD و EF یکدیگر را خارج دایره در نقطه A قطع کرده اند

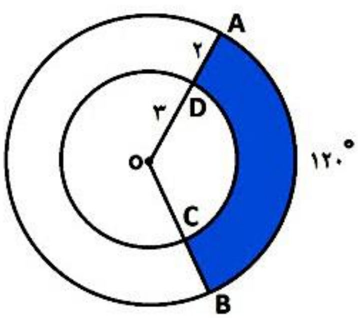
ثابت کنید: $\hat{A}=\dfrac{\widehat{DF}-\widehat{BE}}{2}$ (۱نمره)

اثبات: پاره خط DE را رسم می کنیم داریم:

$A\hat{D}E:\ \hat{A}+\hat{D}_1=\hat{E}_1$

زاویه خارجی

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \hat{A}=\hat{E}_1-\hat{D}_1 \\ \text{محاطی } \hat{E}_1=\dfrac{\widehat{DF}}{2} \\ \text{محاطی } \hat{D}_1=\dfrac{\widehat{BE}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\frac{\widehat{DF}}{2}-\frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow \hat{A}=\frac{\widehat{DF}-\widehat{BE}}{2}$$

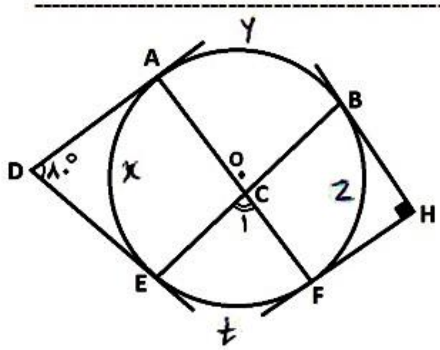


11- با توجه به شکل مقابل <u>محیط</u> قسمت تیره رنگ را بر حسب عدد (پی) حساب کنید.
(۱/۵نمره)

$$\text{طول کمان } AB=\frac{\pi R\alpha}{180}=\frac{\pi\times 5\times 120}{180}=\frac{10\pi}{3}$$

$$\text{طول کمان } DC=\frac{\pi\times 3\times 120}{180}=\frac{6\pi}{3}$$

$$\text{محیط}=P=\text{طول کمان } AB+\text{طول کمان } DC+AD+BC=\frac{10\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}+2+2=\frac{16\pi}{3}+4=\frac{16\pi+12}{3}$$

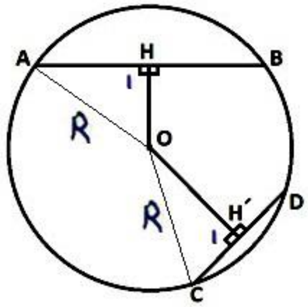


12- د رشکل مقابل اندازه زاویه $\hat{C}_1$ را پیدا کنید. (۱/۵نمره)

با توجه به نماد گذاری روی شکل داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\widehat{ABE}-\widehat{AE}}{2}=\hat{D} \\ \dfrac{\widehat{BAF}-\widehat{BF}}{2}=\hat{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y+z+t-x}{2}=80^\circ \\ \dfrac{x+y+t-z}{2}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z+t-x=160^\circ \\ x+y+t-z=180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y+2t=340^\circ \Rightarrow y+t=170^\circ \Rightarrow \hat{C}_1=\frac{y+t}{2}=\frac{170}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{C}_1=85^\circ}$$



13- در دایره $C(O,R)$ داریم: OH بر AB و OH' بر CD عمود است نشان دهید:

$AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (۲ نمره)

پاره خط های OA و OC را رسم می کنیم:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{H}_1 = 90^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{OAH}: AH^2 + OH^2 = OA^2 \\ &OH \perp AB \overset{\text{تنصیف}}{\Longrightarrow} AH = BH \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} \\ &OA = R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + OH^2 = R^2 \Rightarrow$$

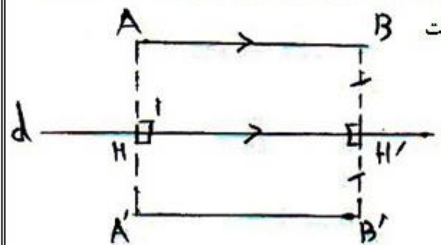
$$\Rightarrow \frac{AB^2}{4} + OH^2 = R^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} \quad (1)$$

$\overset{\triangle}{OCH'}$ با استدلال مشابه برای $\Rightarrow OH'^2 = R^2 - \frac{CD^2}{4} \quad (2)$

داریم:

$$0 < OH < OH' \Leftrightarrow OH^2 < OH'^2 \overset{\text{طبق ۱ و ۲}}{\Longleftrightarrow} R^2 - \frac{AB^2}{4} < R^2 - \frac{CD^2}{4} \Leftrightarrow -\frac{AB^2}{4} < -\frac{CD^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow -AB^2 < -CD^2 \Leftrightarrow CD^2 < AB^2 \underset{\substack{CD>0 \\ AB>0}}{\Longleftrightarrow} CD < AB$$



14- با توجه به شکل ثابت کنید در حالتی که پاره خط AB موازی محور بازتاب d است بازتاب ایزومتری است. (۱/۵ نمره)

اثبات: فرض پاره خط AB موازی محور بازتاب یعنی d باشد
همچنین A' و B' به ترتیب بازتاب A و B نسبت به خط d باشد
با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow AH \parallel BH' \\ &\qquad AB \parallel d \Rightarrow AB \parallel HH' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\text{متوازی الاضلاع}}{\overset{\square}{ABH'H}} \Rightarrow AH = BH' \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 2AH = 2BH' \Rightarrow AA' = BB' \\ &AA' \parallel BB' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\text{متوازی الاضلاع}}{\overset{\square}{ABB'A'}} \Rightarrow AB = A'B'$$