

سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	تعداد صفحه: ۱
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزادسراسرکشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	اگر اشتراک دو بازه $(2, 5)$ و $(\frac{3}{4}, 4)$ یک همسایگی متقارن به مرکز $a$ و شعاع $r$ باشد، مقدار $a$ و $r$ را بیابید.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید: الف) حد دنباله $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$ برابر ..... است. ب) اگر دنباله $\{a_n\}$ که چنین تعریف شده است: $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ همگرا باشد، آنگاه حد دنباله $\{a_n\}$ برابر ..... است.	۱
۳	یکنوایی و کرانداري دنباله $\left\{ \frac{(-1)^n}{n+2} \right\}$ را بررسی کنید.	۱
۴	به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد.	۱/۵
۵	حدهای توابع رو به رو را محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+9x}-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-1}$	۱/۵
۶	حجم آب یک منبع آب، $t$ دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با: $v(t) = 250(16-t)^2$ ، آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.	۱
۷	معادله خط مماس بر تابع $y = \frac{x}{x^2+6}$ را در نقطه $(2, 0/2)$ پیدا کنید.	۱/۵
۸	به ازای چه مقادیری از $a$ ، $b$ و $c$ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ ax^2 + bx + c & , x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟	۱/۵
۹	مشتق بگیرد. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = e^{\cos x}$ ب) $x^2 + y^2 - 6xy = 0$	۱
۱۰	فرض کنید $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ ، مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۱۱	به کمک آزمون مشتق مرتبه دوم نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ پیدا کنید.	۱/۵
۱۲	شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ سانتی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع کره ۶۰ سانتی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.	۱
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.	۲
۱۴	با استفاده از افزایش‌های مناسب، مساحت ناحیه تحت $y = x^2$ بالای $y = 0$ و محدود به خطوط $x = 1$ و $x = 3$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	مقدار متوسط تابع $f(x) = x^2 + x$ را در بازه $[1, 3]$ پیدا کنید.	۱
۱۶	انتگرال‌های معین و نامعین رو به رو را بیابید الف) $\int (e^{2x} + \cos x) dx$ ب) $\int \frac{dx}{x^2}$	۱
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

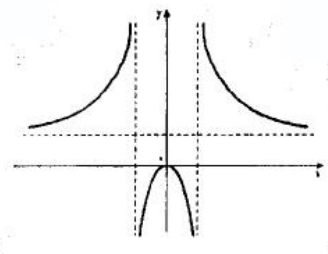
۱	$(2,5) \cap (\frac{3}{2}, 4) = (2, 4)$ (۰/۵) $a = \frac{2+4}{2} = 3$ (۰/۲۵) $r = \frac{4-2}{2} = 1$ (۰/۲۵)	۱
۱		۲ الف) $(0/5) e^x$ ب) $(0/5) x^3$
۱	جملات دنباله بصورت: $(0/25)$ $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ در نتیجه غیر یکنوا است. (۰/۲۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 0$ (۰/۲۵) همگرا به صفر $\Rightarrow$ (۰/۲۵) کراندار است	۳
۱/۵	$a_n = \frac{1}{2n\pi}$ (۰/۲۵) , $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ (۰/۲۵) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (۰/۲۵) $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$ (۰/۲۵) , $f(b_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ (۰/۲۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \xrightarrow{(0/25)}$ حد ندارد	۴
۱/۵	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{2x \sqrt{1 + \frac{9}{4x} - \frac{1}{4x^2}}} \xrightarrow{(0/5)} \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \xrightarrow{(0/5)} \frac{2}{3}$ (۰/۲۵)	۵ الف) ب)
۱	$v'(t) = -500(16-t) \xrightarrow{(0/5)} v'(4) = -6000$ (۰/۲۵) یعنی وقتی که ۴ دقیقه از زمان تخلیه آب منبع گذشته باشد، پس از یک دقیقه دیگر ۶۰۰۰ لیتر دیگر تخلیه می‌شود. (۰/۲۵)	۶
۱/۵	$y' = \frac{x^2 + 6 - 2x(x)}{(x^2 + 6)^2} \xrightarrow{(0/5)} \frac{-x^2 + 6}{(x^2 + 6)^2}$ (۰/۲۵) $m = f'(2) = \frac{1}{50}$ (۰/۲۵) $y - \frac{2}{10} = \frac{1}{50}(x - 2) \xrightarrow{(0/25)} y = \frac{1}{50}x + \frac{8}{50}$ (۰/۲۵)	۷

ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱		پیش دانشگاهی
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۵	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + b + c = 1 \quad (0/25)$ $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 1 \\ 2ax + b & x \geq 1 \end{cases} \quad (0/25), f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 2a + b = 3 \quad (0/25)$ $f''(x) = \begin{cases} 6x & x < 1 \\ 2a & x \geq 1 \end{cases} \quad (0/25), f''_+(1) = f''_-(1) \rightarrow 2a = 6 \quad (0/25)$ $\rightarrow a = 3, b = -2, c = 1 \quad (0/25)$	۸
۱	الف) $y' = -\sin x \times e^{\cos x} \quad (0/5)$ ب) $3x^2 + 3y^2 y' - 6y - 6xy' = 0 \quad (0/5)$	۹
۱	$y = 1 \Rightarrow x = 0 \quad (0/25)$ $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 \quad (0/25)$ $f'(0) = 6 \xrightarrow{(0/25)} (f^{-1})'_{(1)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6} \quad (0/25)$	۱۰
۱/۵	$f'(x) = \sqrt{3} + 2\sin x = 0 \xrightarrow{(0/25)} x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3} \quad (0/25)$ $f''(x) = 2\cos x \xrightarrow{(0/25)} \begin{cases} f''(\frac{4\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2}) = -1 < 0 \quad (0/25) \\ f''(\frac{5\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}) = 1 > 0 \quad (0/25) \end{cases}$ <p>نقطه <math>x = \frac{4\pi}{3}</math> ماکسیمم موضعی و نقطه <math>x = \frac{5\pi}{3}</math> مینیمم موضعی است. (۰/۲۵)</p>	۱۱
۱	$v = \frac{4}{3}\pi r^2, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \times \frac{dr}{dt} \xrightarrow{(0/25)} = 4\pi r \times \frac{dr}{dt} \quad (0/25)$ $r = 60 \rightarrow v'(t) = 4\pi (60)^2 \times 3 \xrightarrow{(0/25)} = 43200\pi \quad (0/25)$	۱۲
۲	$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (0/25)$ <p>مجانب قائم <math>x = \pm 1 \quad (0/25)</math>      مجانب افقی <math>y = 1 \quad (0/25)</math>      <math>x \rightarrow \pm\infty</math></p>	۱۳

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵ / ۱۰ / ۱۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

	$y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad (0/25)$ <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td></td> <td>+</td> <td>-</td> <td></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td><math>+\infty</math></td> <td></td> <td>Max</td> <td></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table>  <p style="text-align: center;">(0/5)                      (0/5)</p>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	+		+	-		y	$+\infty$		Max		$+\infty$	۱۳
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$															
y'	+		+	-																
y	$+\infty$		Max		$+\infty$															
۱/۵	<p>بازه ی <math>[0, 2]</math> را به <math>n</math> بازه ی جزء با طول مساوی تقسیم می کنیم:</p> $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \quad (0/25), \quad x_i = 1 + \frac{2}{n}i \quad (0/25), \quad f(x_i) = \frac{4}{n^2}i^2 + \frac{4}{n}i + 1 \quad (0/25)$ $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{4}{n^2}i^2 + \frac{4}{n}i + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left( \frac{4}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{26}{3} \quad (0/25)$	۱۴																		
۱	$\bar{f}(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \stackrel{(0/25)}{=} \frac{1}{2-1} \int_1^2 (x^2 + x) dx \stackrel{(0/25)}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^2 \stackrel{(0/25)}{=} 12 \quad (0/25)$	۱۵																		
۱	<p>الف) <math>\int (e^{2x} + \cos x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \sin x + c \quad (0/5)</math></p> <p>ب) <math>\int_1^5 \frac{dx}{x^2} = \int_1^5 x^{-2} dx = \left( -\frac{1}{x} \right) \Big _1^5 = \frac{4}{5} \quad (0/25)</math></p>	۱۶																		
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر																			