

نام خانوادگی:	نام درس: هندسه تحلیلی	اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران (منطقه ی ۱۲)
کلاس: چهارم	نام دبیر: آقای احمدنژاد رودسری	دبیرستان و پیش دانشگاهی غیر دولتی
رشته: ریاضی	تاریخ امتحان: ۹۶/۰۳/۱۸	امتحانات نوبت دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۵
شماره صندلی:	ساعت امتحان: ۹ صبح	
	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	قرینه و تصویر بردار $\vec{a} = (2, -3, 4)$ را در راستای بردار $\vec{b} = (1, -2, 1)$ به دست آورید.	۲
۲	خط $D$ به معادله $-Z = \frac{y+3}{3} = \frac{x+1}{2}$ و صفحه ی $P$ به معادله ی $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ مفروض است: الف) نقطه تلاقی خط $D$ و صفحه $P$ را بیابید. ب) معادله ی صفحه ای عمود بر $D$ در نقطه ی تلاقی خط و صفحه را به دست آورید.	۱/۵
۳	قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچکش می باشد، خروج از مرکز آن را بیابید.	۱/۵
۴	معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن خط $x = 3$ و $F = (1, -1)$ کانون باشد.	۱/۵
۵	معادله دایره ای که مرکز آن به طول یک و بر دو خط $y + x = 0$ و $y + x = 4$ مماس است را بنویسید.	۱
۶	اگر $2x - 3y + 2 = 0$ و $2x + 3y + 6 = 0$ مجانب های یک هذلولی باشند و این هذلولی از $M(-1, 2)$ عبور کند، معادله هذلولی را بنویسید.	۱/۵
۷	حالت استاندارد معادله $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 2$ را بنویسید.	۲
۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^n = mA + nI_2$ باشد، مقدار $\frac{m}{n}$ را بیابید.	۱/۵
۹	اگر $A - B$ و $A + B$ خود توان باشند؛ اولاً: ثابت کنید $A^2 + B^2 = A$ ثانیاً: ثابت کنید $A$ و $B^2$ تعویض پذیرند.	۱/۵
۱۰	حاصل عبارت زیر را با خواص دترمینان بیابید. $\begin{vmatrix} 1 & \log x & \log yz \\ 1 & \log y & \log xz \\ 1 & \log z & \log xy \end{vmatrix}$	۲
۱۱	دستگاه زیر را به روش حذفی گaus حل کنید. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$	۲
۱۲	اگر $\lambda \neq -1$ و $A$ ماتریس معکوس پذیر، به طوری که $A^2 = A$ باشد و $B = A + \lambda I$ باشد؛ ثابت کنید $B$ معکوس پذیر است.	۲
۲۰	موفق باشید.	جمع نمره

-۱

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{2 + 6 + 4}{1 + 4 + 1} (1, -2, 1) = (2, -4, 2)$$

$$a'' = 2a' - a = (4, -8, 4) - (2, -3, 4) = (2, -5, 0)$$

-۲

$$\text{الف) } D = \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 3 \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow 2(2t - 1) - 2(3t - 3) + 4(-t) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow A = (1, 0, -1)$$

$$\text{ب) } u_D = (2, 3, -1) = n_P / 2(x - 1) + 3(y - 0) - (z + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z = 3$$

-۳

$$a = 2b \rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

-۴

$$a = -1 \rightarrow (y + 1)^2 = 4(-1)(x - 2)$$

-۵

$$2R = \frac{|4 - 0|}{\sqrt{1 + 1}} \rightarrow R = \sqrt{2}, O \in (y = -x + 2) \rightarrow y = 1 \rightarrow O \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$O(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

-۶

$$(2x - 3y + 2)(2x + 3y + 6) = K$$

$$M(-1, 2) \rightarrow (-2 - 6 + 2)(-2 + 6 + 6) = -6 \cdot 10 = K$$

$$4x^2 - 9y^2 + 16x - 12y + 12 = 0$$

-۷

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3} \rightarrow 2\theta = 60^\circ \rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y', \quad y = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)\left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right) + \left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 = 2$$

$$\frac{3}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 + \frac{3}{2} x'^2 - \frac{3}{2} y'^2 + \frac{1}{2} x'^2 + \frac{3}{2} y'^2 = 2$$

-۸

$$A^2 - (a + d)A + |A|I = 0 \rightarrow A^2 - mA - nI = 0$$

$$\begin{cases} m = a + d = 5 \\ n = -|A| = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{5}{2}$$

$$(A + B)^T = A + B \Rightarrow (A + B)^T = A^T + AB + BA + B^T = A + B$$

$$(A - B)^T = A - B \Rightarrow (A - B)^T = A^T - AB - BA + B^T = A - B$$

$$\Rightarrow 2A^T + 2B^T = 2A \xrightarrow{\div 2} A^T + B^T = A$$

ثانياً:

$$AB^T = A(A - A^T) = A^T - A^T = (A - A^T)A = B^T A \text{ است تعویض پذیر است}$$

-۱۰

$$\begin{vmatrix} 1 & \log x & \log yz \\ 1 & \log y & \log xz \\ 1 & \log z & \log xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \log x & \log xyz \\ 1 & \log y & \log xyz \\ 1 & \log z & \log xyz \end{vmatrix} = \log xyz \begin{vmatrix} 1 & \log x & 1 \\ 1 & \log y & 1 \\ 1 & \log z & 1 \end{vmatrix} = \log xyz \times 0 = 0$$

-۱۱

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{5}{3}R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$-z = -3 \Rightarrow z = 3$$

$$-3y - 6z = -12 \Rightarrow y = -2$$

$$x + 2y + 3z = 9 \Rightarrow x = 4$$

-۱۲

$$A^T = A \rightarrow |A^T| = |A| \Rightarrow |A|^T = |A| \xrightarrow{|A| \neq 0} |A| = 1$$

$$|B| = |A + \lambda I| = |A + \lambda A^{-1}A| = |A + \lambda A^{-1}A^T| = |(I + \lambda A^{-1}A)A|$$

$$|I + \lambda I||A| = |I(1 + \lambda)||A| = |I|(1 + \lambda)|A| = 1(1 + \lambda) \times 1$$

$$= 1 + \lambda \xrightarrow{\lambda \neq -1} 1 + \lambda \neq 0 \Rightarrow |B| \neq 0 \text{ معکوس پذیر است}$$