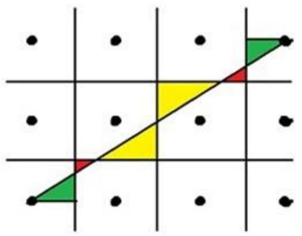
قضیه‌ی پیک: در چندضلعی‌های شبکه‌ای اگر تعداد نقاط مرزی را با b و تعداد نقاط درون شبکه‌ای را با i نشان دهیم در این صورت مساحت چندضلعی شبکه‌ای از دستور زیر محاسبه می‌شود

$$\boxed{S = \frac{b}{2} + i - 1}$$

اثبات: (این اثبات خارج از برنامه درسی است و برای امتحان قابل استفاده نیست و برای مطالعه دانش‌آموزان علاقه‌مند ترسیم می‌شود)

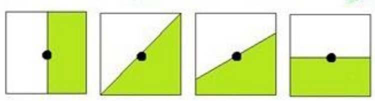


نکته ۱: هر خط که دو نقطه شبکه را به هم متصل می‌کند در دو طرف خط اشکال دو به دو همنهشت در نتیجه با مساحت‌های یکسان ایجاد می‌کند (شکل مقابل)

نکته ۲: روی هر راس چندضلعی مربعی به طول واحد در نظر بگیرید بطوری که راس چندضلعی در مرکز مربع باشد. اشتراک زاویه درونی هر راس چندضلعی و آن مربع ناحیه‌ای با مساحت S_k بنامید. حال برای n راس مجموع مساحت‌های آن را به صورت $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به نکته ۱ بدیهی است که برای یک n ضلعی: $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\frac{(n-2)180}{360}$

نکته ۳: نقاطی از شبکه که روی اضلاع چندضلعی شبکه‌ای قرار می‌گیرد همواره در قسمت داخل چندضلعی مساحتی برابر $\frac{1}{2}$ (واحد اندازه‌گیری سطح) دارد. (شکل مقابل) ←



نکته ۴: اگر تعداد نقاط مرزی را با b و تعداد راس‌ها را با n نمایش دهیم در این صورت داریم:

تعداد نقاط مرزی = تعداد نقاط روی اضلاع (نه دو سر اضلاع) + تعداد راس‌ها

⇒ تعداد نقاط روی اضلاع = تعداد نقاط مرزی − تعداد راس‌ها

⇒ تعداد نقاط روی اضلاع = $b - n$

نتیجه و پایان استدلال

★ ← (مساحت نواحی که شامل نقاط درون شبکه‌ای هستند) + (مساحت نواحی که شامل نقاط روی اضلاع (نه دو سر اضلاع) هستند) + (مساحت نواحی که شامل راس‌ها هستند) = مساحت چندضلعی شبکه‌ای = S

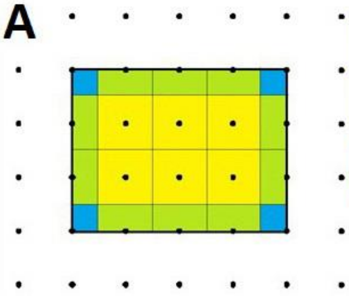
$$\Rightarrow S = \frac{(n-2)\times 180}{360} + (b-n)\times\frac{1}{2} + i\times 1 \quad \leftarrow ★$$

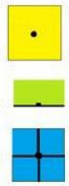
$$\Rightarrow S = \frac{n-2}{2} + \frac{b-n}{2} + i = \frac{n-2+b-n}{2} + i = \frac{b-2}{2} + i = \frac{b}{2} - 1 + i$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{b}{2} + i - 1}$$

در شکل‌های زیر نحوه محاسبه مساحت را نه با فرمول اصلی پیک بلکه با فرمول ★ که در قسمت آخر به آن اشاره شد ملاحظه کنید.

A





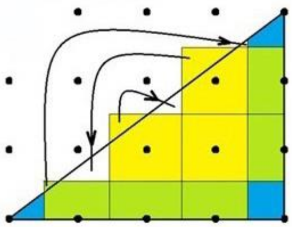
مساحت نواحی که شامل نقاط درون شبکه‌ای هستند $= i \times 1 = 6\times 1 = 6$

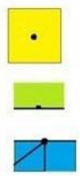
مساحت نواحی که شامل نقاط روی اضلاع (نه دو سر اضلاع) هستند $= (b-n)\times\frac{1}{2} = 10\times\frac{1}{2} = 5$

مساحت نواحی که شامل رأس‌ها هستند $= \frac{(n-2)\times 180}{360} = \frac{(4-2)\times 180}{360} = 1$

مساحت چندضلعی شبکه‌ای $= S = 6+5+1 = 12$

B





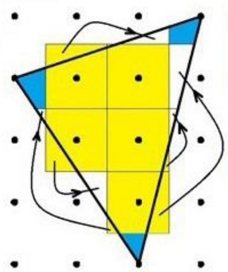
مساحت نواحی که شامل نقاط درون شبکه‌ای هستند $= i \times 1 = 3\times 1 = 3$

مساحت نواحی که شامل نقاط روی اضلاع (نه دو سر اضلاع) هستند $= (b-n)\times\frac{1}{2} = 5\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

مساحت نواحی که شامل رأس‌ها هستند $= \frac{(n-2)\times 180}{360} = \frac{(3-2)\times 180}{360} = \frac{1}{2}$

مساحت چندضلعی شبکه‌ای $= S = 3+\frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 6$

C

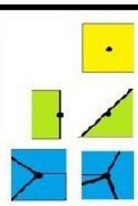


مساحت نواحی که شامل نقاط درون شبکه‌ای هستند $= i \times 1 = 5\times 1 = 5$

مساحت نواحی که شامل نقاط روی اضلاع (نه دو سر اضلاع) هستند $= (b-n)\times\frac{1}{2} = 0\times\frac{1}{2} = 0$

مساحت نواحی که شامل رأس‌ها هستند $= \frac{(n-2)\times 180}{360} = \frac{(3-2)180}{360} = \frac{1}{2}$

مساحت چندضلعی شبکه‌ای $= S = 5+0+\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$



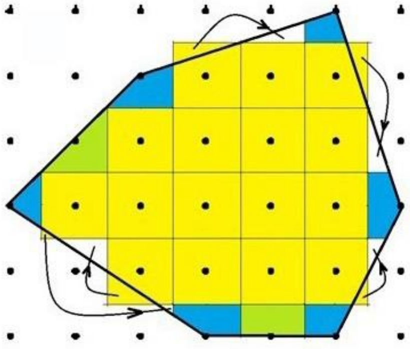
مساحت نواحی که شامل نقاط درون شبکه‌ای هستند $= i \times 1 = 16\times 1 = 16$

مساحت نواحی که شامل نقاط روی اضلاع (نه دو سر اضلاع) هستند $= (b-n)\times\frac{1}{2} = 2\times\frac{1}{2} = 1$

مساحت نواحی که شامل رأس‌ها هستند $= \frac{(n-2)\times 180}{360} = \frac{(6-2)180}{360} = 2$

مساحت چندضلعی شبکه‌ای $= S = 16+1+2 = 19$

D



حال مساحت هر یک از شکل‌ها را مستقیماً با دستور پیک حساب کنید

$S_A = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{14}{2} + 6 - 1 = 7+6-1 = 12$

$S_B = \frac{8}{2} + 3 - 1 = 4+3-1 = 6$

$S_C = \frac{3}{2} + 5 - 1 = 5\frac{1}{2}$

$S_D = \frac{8}{2} + 16 - 1 = 19$

نویسنده: بهرام کیانی